Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Introducción

Introducción

- En este capítulo continuamos con optimización.

- El objetivo: ampliar el espectro de situaciones que podemos modelar.

- Hasta ahora sabemos resolver:
  - Problemas sin restricciones (capítulo 3).
  - Problemas con restricciones de igualdad (capítulo 4).

- El siguiente paso es incorporar restricciones de desigualdad.
  - $x^2 + y^2 \leq 1$.
- Los problemas generales a los que se enfrentarán serán de esa índole.
  - Un consumidor tiene como tope **a lo más** ingreso.
  - Una empresa propone un presupuesto **máximo**.
  - Un administrador de inversiones elige un nivel de riesgo **máximo**.
- La intuición matemática no será distinta al capítulo 4.
  - Pero habrán más condiciones y detalles que mirar.

Motivación: La billetera abultada

Motivación: La billetera abultada

- Pensemos en una empresa que maximiza utilidades π.
  - Produce un bien usando L y K, que cuestan w y r, respectivamente.
  - Y tiene disponible un presupuesto B.
- ¿Cuál es la forma correcta de plantear el problema?
- Una forma es escribir

$$\begin{aligned} \max_{K,L\in\mathbb{R}} \quad & \pi(K,L) \\ \text{s.a.} \quad & rK + wL = B \end{aligned}$$

Motivación: La billetera abultada

- ¿Cuál es el problema con este problema particular?
  - Asume que la empresa **quiere** usar todo su presupuesto.
  - Asume que K y L serán positivos (o cero) en la solución óptima.

- Si uno de esos problemas se presenta, el problema está mal planteado.

- Dos opciones:
  - Nos aseguramos que nada de eso pase (se puede hacer, pero solo a veces).
  - Planteamos el problema de manera robusta (¡eso haremos este capítulo!)

- El problema bien planteado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{K,L\in\mathbb{R}} \quad & \pi(K,L) \\ \text{s.a.} \quad & rK + wL \leq B \\ & K \geq 0, L \geq 0 \end{aligned}$$

- Pero, ¿cómo resolvemos esto?

- Intuición:
  - Si una restricción se cumple con igualdad, estamos en el caso anterior.
  - Si una restricción no se cumple con igualdad, no era necesaria.

Condiciones necesarias de KKT

Algunas consideraciones: El problema

- Vamos a partir como en el capítulo 4, con 2 variables y 1 restricción.

$$\begin{aligned} \max_{x,y \in \mathbb{R}} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) \leq c \end{aligned}$$

- Notar que cualquier restricción se puede escribir de esa manera.
  - Dejamos las variables a un lado y los números al otro.
  - Y si fuera $\geq$, se multiplica todo por -1.

- También recordar que si el problema es de minimización, se maximiza $-f$.

Algunas consideraciones: Restricción (in)activa

Definición (Restricción activa o inactiva)

Consideremos la restricción $g(x,y) \leq c$ y un punto (x_0,y_0). Diremos que:

- La restricción está **activa** en el punto (x_0,y_0) si

$$g(x_0,y_0) = c$$

- La restricción está **inactiva** en (x_0,y_0) si

$$g(x_0,y_0) < c$$

- Esta definición es importante para las condiciones de suficiencia.
  - Pero también para la intuición.

Intuición de las condiciones de KKT

- Pensemos en nuestro problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) \leq c \end{aligned}$$

- Y supongamos que la solución es (x^*,y^*).

- Tenemos dos opciones para $g(x^*,y^*)$:
  1. Es activa.
  2. Es inactiva.

- Si la restricción está activa, entonces (x^*, y^*) es solución de

$$\begin{aligned} \max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) = c \end{aligned}$$

- Es decir, ¡podemos encontrar este punto usando Lagrange!

- Dicho de otra manera, el método de Lagrange entrega (x^*, y^*) como candidato.
  - Las condiciones del método son una condición **necesaria** en ese caso.

Intuición de las condiciones de KKT

- Si la restricción es inactiva, entonces si miramos el problema

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y)$$

- Tendremos que (x^*, y^*) es máximo local de f.

- Dicho de otra manera, bastaría con encontrar puntos críticos de f.
  - Ser un punto crítico de f sería condición **necesaria** en ese caso.

Intuición de las condiciones de KKT

- En resumen, para lograr encontrar (x^*, y^*) nos ponemos en dos escenarios:
  1. En el caso con g inactiva, donde buscamos puntos críticos de f.
  2. En el caso con g activa, donde usamos el método de Lagrange.

- Esto puede ser muy tedioso.
  - Sobre todo cuando aparezcan más restricciones (*spoiler alert*).

- Las condiciones de KKT intentan dar un único método.
  - Su objetivo es resumir esta intuición con un solo procedimiento.

Teorema (Condiciones necesarias de KKT)

Sean f y g dos funciones bivariadas con derivadas parciales continuas y sea $c \in \mathbb{R}$. Supongamos que (x^*, y^*) es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) \leq c \end{aligned}$$

y que (x^*, y^*) no es un punto crítico de g si la restricción está activa. Defina el lagrangiano $\mathcal{L}$ como en el capítulo 4. Entonces, existe un número λ^* tal que (x^*, y^*, λ^*) verifican

1. $\mathcal{L}_x(x^*, y^*, \lambda^*) = \mathcal{L}_y(x^*, y^*, \lambda^*) = 0$.
2. $\lambda^* \geq 0$ y $\lambda^*[g(x^*, y^*) - c] = 0$.
3. $g(x^*, y^*) \leq c$.

- Notar algunas que las condiciones 1 y 3 se parecen mucho a Lagrange.

- La única condición extraña es la 2.
  - Por un lado, impone que $\lambda^* \geq 0$.
  - Pero además, dice que es 0 cuando la restricción está inactiva.

- Esa es la condición que permite juntar los dos métodos de la intuición:
  - Cuando $\lambda^* = 0$, $\mathcal{L}$ es solamente f y por 1 buscamos puntos críticos de f.
  - Cuando $\lambda^* > 0$, obtenemos el método de Lagrange (porque $g(x^*, y^*) = c$).
  - Veremos por qué no ocurre $\lambda^* < 0$, luego de unos ejemplos.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Retomemos el ejemplo de la empresa que produce un bien usando K y L, sujeta a un presupuesto de 500. El problema más razonable plantea que la empresa podría no querer usar todo su presupuesto, es decir, el problema es

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \quad & \sqrt{K} + L \\ \text{s.a.} \quad & K + 20L \leq 500 \end{aligned}$$

El lagrangeano del problema es

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = \sqrt{K} + L - \lambda\left[K + 20L - 500\right]$$

Revisemos las condiciones de KKT.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Tenemos que la primera condición de KKT obliga a que

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2\sqrt{K}} - \lambda = 0 \tag{CPO-K}$$

$$\mathcal{L}_L = 1 - 20\lambda = 0 \tag{CPO-L}$$

De (CPO-L) tenemos que $\lambda^* = \frac{1}{20}$ y de (CPO-K), $K^* = 100$. Como $\lambda^* > 0$, la segunda condición de KKT obliga a que

$$K^* + 20L^* = 500$$

de donde $L^* = 20$. Sorpresivamente, obtuvimos el mismo candidato antes, ¿por qué?

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

La explicación es que el único candidato que encontramos cumplía que la restricción estaba activa, es decir, ese candidato se obtenía usando el método de Lagrange en el problema

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \quad & \sqrt{K} + L \\ \text{s.a.} \quad & K + 20L = 500 \end{aligned}$$

¿Había alguna forma de predecir que esto iba a pasar? La respuesta es sí. Notar que no tenía sentido que en un candidato se ocupen menos de 500 del presupuesto. Si así fuera, y $K + 20L < 500$, podríamos aumentar un poquito K o L y mejorar el valor de la función objetivo. Dicho de otra manera, cuando nos enfrentamos al problema original, podíamos argumentar que podíamos en su lugar resolver el problema con igualdad directamente.

Condiciones necesarias de KKT

- Recordar que es importante cumplir la condición $\nabla g \neq 0$.
  - La **condición de calificación de restricción** (CCR).

- Esos puntos, **si cumplen la restricción con igualdad**, también son candidatos.

- A continuación veremos un ejemplo un poco más complejo que la incorpora.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Pensemos que una persona debe ubicar una bandera en el punto más alejado de una cancha elíptica dada por la ecuación $x^2+4y^2=16$. En este caso el problema de optimización es

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2+y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x^2+4y^2 \leq 16 \end{aligned}$$

con lagrangeano

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda[x^2+4y^2-16]$$

Notar que en este caso, el gradiente de la restricción es

$$\nabla g(x,y)=(2x,8y)=0$$

que se anula en $(0,0)$, pero en ese punto la restricción **NO** está activa y no se viola la CCR.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Revisemos ahora las condiciones de KKT para los puntos que sí verifican la restricción. Tenemos que

$$\mathcal{L}_x = 2x - 2\lambda x = 0 \qquad \text{(CPO-}x\text{)}$$

$$\mathcal{L}_y = 2y - 8\lambda y = 0 \qquad \text{(CPO-}y\text{)}$$

Reescribamos estas condiciones

$$2x(1-\lambda) = 0 \qquad \text{(CPO-}x\text{)}$$

$$2y(1-4\lambda) = 0 \qquad \text{(CPO-}y\text{)}$$

De (CPO-x) hay dos opciones: $x^* = 0$ ó $\lambda^* = 1$. Veamos qué pasa si $x^* = 0$. Una opción es que $y^* = 0$, en cuyo caso $\lambda^* = 0$ porque la restricción estaría inactiva. Esto nos da el primer candidato: $(0,0,0)$.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

La otra opción es que $\lambda^* = \frac{1}{4}$, por lo que la restricción está activa y por lo tanto

$$(x^*)^2 + 4(y^*)^2 = 16$$

Como $x^* = 0$, entonces $4(y^*)^2 = 16$, de donde $y^* = \pm 2$. Con eso ya tenemos 3 candidatos: $(0,0,0)$, $\left(0,2,\frac{1}{4}\right)$ y $\left(0,-2,\frac{1}{4}\right)$. Veamos qué pasa ahora si $\lambda^* = 1$. Las CPO eran

$$2x(1-\lambda) = 0 \tag{CPO-x}$$

$$2y(1-4\lambda) = 0 \tag{CPO-y}$$

Como en (CPO-y) el paréntesis no es 0, entonces debe ser cierto que $y^* = 0$. Como además $\lambda^* > 0$, la restricción está nuevamente activa y tenemos que $x^* = \pm 4$. Eso suma dos nuevos candidatos $(4,0,1)$ y $(-4,0,1)$. Pero, ¿cuál es el verdadero óptimo?

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

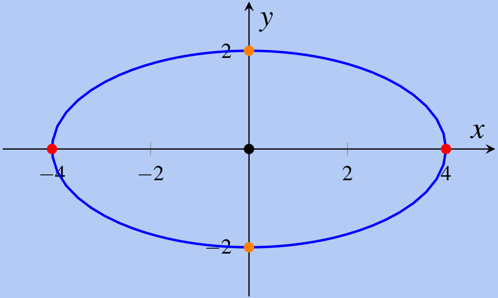
Podemos asegurar soluciones óptimas usando condiciones de segundo orden, que veremos luego. Pero también podemos revisar a mano los puntos (al final son solo 5). Si llamamos f a la función objetivo, tenemos que

$$
\begin{array}{lll}
f(0,0) = 0 & f(0,2) = 4 & f(0,-2) = 4 \\
f(4,0) = 16 & f(-4,0) = 16 &
\end{array}
$$

Luego la solución óptima son los puntos $(4,0,1)$ y $(-4,0,1)$. ¿Por qué aparecen los demás? La respuesta es que esos son los mínimos de f sujeto a la restricción con igualdad. El punto $(0,0)$ aparece porque es un punto crítico de f.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Gráficamente es relativamente directo ver esto:



Los puntos rojos son los máximos del problema que planteamos, los puntos naranjos son los mínimos del problema sujeto a la restricción de igualdad y el punto **negro** es el mínimo del problema con desigualdad.

Ejercicio (Condiciones necesarias de KKT)

Resuelva el problema “invertido” de la firma, de minimizar el costo sujeto a que la producción debe ser de **al menos** 30, es decir

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \quad & K + 20L \\ \text{s.a.} \quad & \sqrt{K} + L \geq 30 \end{aligned}$$

Ejercicio (Condiciones necesarias de KKT)

Una montaña tiene una forma dada por la ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$. A lo largo de la montaña cruza una falla, siguiendo la recta de ecuación $x - 3y = -10$. Las autoridades están preocupadas de derrumbes que puedan llegar a la ciudad, que está completamente de un lado de la falla. En particular, la ciudad se encuentra dentro de la región $x - 3y \leq -10$ que está a un lado de la recta. Encuentre el punto más alto desde donde podrían haber derrumbes en esa región.

Ejercicio (Condiciones necesarias de KKT)

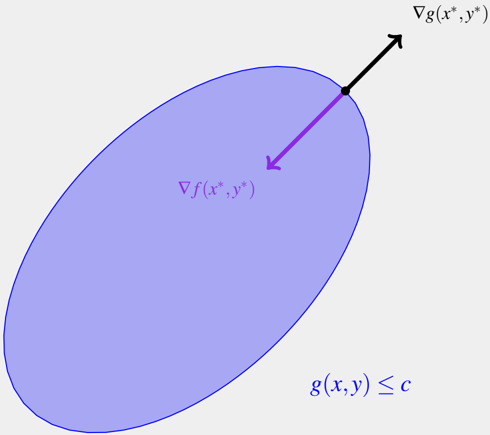
Realice el mismo ejercicio anterior pero si la falla sigue la recta $x - 3y = 10$ y la ciudad está en la región $x - 3y \leq 10$.

Condiciones necesarias de KKT: ¿Por qué $\lambda^* = 0$?

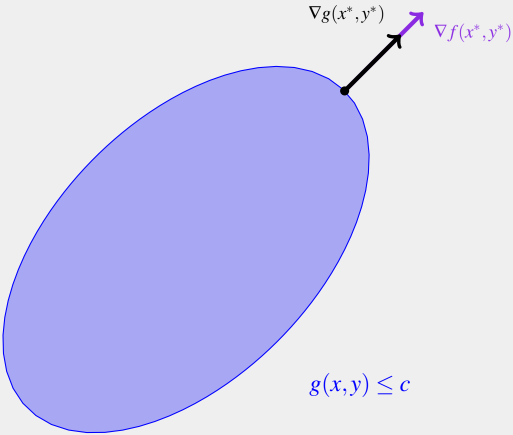
- ¿Por qué cuando la restricción no es activa $\lambda^* = 0$?
  - La respuesta viene de pensar qué sucede si sacamos la restricción.
- En ese caso, habrían más puntos que podrían maximizar globalmente a f.
  - Entonces el que encontramos antes al menos es un máximo local.
  - Por lo que debe cumplirse $\nabla f = 0$.
- Para ello, como $\mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x$, debemos tener $\lambda = 0$.

- ¿Por qué con KKT impedimos que $\lambda^* < 0$?
- Recordemos que si $\lambda^* < 0$, ∇f y ∇g apuntan en sentidos opuestos.
- Pensemos entonces que la restricción está activa (es decir, $g(x,y) = c$).
  - Si nos movemos en la dirección de ∇f, entonces f crece.
  - Y como ∇g apunta en dirección opuesta, entonces g decrece.
  - Es decir, $g(x,y) \leq c$ en el nuevo punto.
  - Juntando todo, tenemos un punto con f más grande, que cumple la restricción.

CONDICIONES NECESARIAS DE KKT: ¿POR QUÉ $\lambda^* \geq 0$?



(a) $\lambda < 0$



(b) $\lambda > 0$

Condiciones necesarias de KKT: El caso general

Condiciones necesarias de KKT: El caso general

- En este capítulo generalizaremos inmediatamente el problema.
- Tanto a más variables como a más restricciones.
- Y los teoremas del resto del capítulo serán aplicados al caso general.

Condiciones necesarias de KKT: El caso general

Teorema (Condiciones necesarias de KKT)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) \leq c_1 \,, \ldots \,, g_m(\mathbf{x}) \leq c_m \end{aligned}$$

y que $\mathbf{x}^*$ satisface la condición de calificación de restricciones (CCR). Defina el lagrangiano $\mathcal{L}$ como en el capítulo 4. Entonces, existen números $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ verifican

1. $\mathcal{L}_{x_i}(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) = 0$ para todo i.
2. $\lambda_j^* \geq 0$ y $\lambda_j^* [g_j(x^*, y^*) - c_j] = 0$ para todo j.
3. $g_j(x^*, y^*) \leq c_j$ para todo j.

- Solo nos faltó mencionar la restricción de calificación de restricciones.

Definición (Condición de calificación de restricciones en KKT)

Sean $g_j : \mathbb{R}^n$, con $j = 1, \ldots, m$, funciones que determinan las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \leq c_j$ del teorema anterior. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto que verifica las restricciones y tal que solo k de las m restricciones están activas (puede ser que $k = m$).

Diremos que $\mathbf{x}_0$ satisface la CCR si al construir la matriz Jacobiana de las restricciones **activas**, esta matriz tiene rango k.

- **¡IMPORTANTE!** Solo se arma la matriz Jacobiana con las restricciones **activas**.

Condiciones necesarias de KKT: El caso general

- Si se fijan, comprobar qué puntos violan la CCR es complejo.
- Si hay 3 restricciones, entonces debemos buscar puntos que:
  - No cumplan la CCR con 1 restricción activa (3 opciones).
  - No cumplan la CCR con 2 restricciones activas (3 opciones).
  - No cumplan la CCR con 3 restricciones activas (1 opción).
- Y además de eso, en cada caso pueden aparecer múltiples puntos.
- **¡IMPORTANTE!** No revisen la CCR a menos que se pida explícitamente.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Pensemos en nuestro problema del consumidor sobre ver series (s) y jugar videojuegos (v). Pensemos que ahora que s son capítulos de una serie y v son niveles de un videojuego. Igual que antes, pensemos que solo tenemos 8 horas de tiempo libre. Cada capítulo de la serie dura 12 minutos y cada nivel del videojuego 6 minutos. Además, los capítulos de la serie y los niveles del videojuego se pagan por separado. Cada nivel cuesta \$$10$ y cada capítulo cuesta \$$5$ y tenemos un presupuesto de \$$350$. Ahora queremos resolver:

$$\begin{aligned}
\max_{v,s\in\mathbb{R}_+} \quad & \ln(v)+\ln(s) \\
\text{s.a.} \quad & 0{,}1v+0{,}2s \leq 8 \\
& 10v+5s \leq 350
\end{aligned}$$

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

En este caso no se viola la CCR nunca porque todas la matrices Jacobianas posibles son numéricas y con filas LI (pueden verlo si quieren). Ahora escribimos el lagrangeano

$$\mathcal{L}(v,s,\lambda_1,\lambda_2) = \ln(v) + \ln(s) - \lambda_1[0{,}1v + 0{,}2s - 8] - \lambda_2[10v + 5s - 350]$$

Ahora revisamos las CPO

$$\mathcal{L}_v = \frac{1}{v} - 0{,}1\lambda_1 - 10\lambda_2 = 0 \tag{CPO-v}$$

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{s} - 0{,}2\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \tag{CPO-s}$$

¿Qué hacemos ahora? Depende de las restricciones que estén o no activas. Para eso tenemos que ver todos los casos posibles.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Supongamos que ambas restricciones están activas, eso significa que

$$\begin{aligned} 0{,}1v + 0{,}2s &= 8 \\ 10v + 5s &= 350 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema (se puede multiplicar por 100 la primera ecuación y restar), obtenemos $s^* = 30$ y $v^* = 20$. Luego, λ_1^* y λ_2^* se encuentran resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 0{,}1\lambda_1^* + 10\lambda_2^* &= \frac{1}{v^*} = \frac{1}{20} \\ 0{,}2\lambda_1^* + 5\lambda_2^* &= \frac{1}{s^*} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

que da como resultado $\lambda_1^* = \frac{1}{18}$ y $\lambda_2^* = \frac{1}{225}$. Ya tenemos el primer candidato.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Ahora supongamos que solo la primera restricción está activa ($0{,}1v + 0{,}2s = 8$), pero que la segunda no lo está, luego $\lambda_2 = 0$ por las condiciones de KKT. Esto significa que las CPO quedan

$$\frac{1}{v} - 0{,}1\lambda_1 = 0, \qquad \frac{1}{s} - 0{,}2\lambda_1 = 0$$

De aquí,

$$\frac{1}{0{,}1v} = \lambda_1 = \frac{1}{0{,}2s} \Rightarrow v = 2s$$

Reemplazando esto en la restricción activa obtenemos $s^* = 20$ y $v^* = 40$. **¡CUIDADO!** pues

$$10v^* + 5s^* = 500 > 350$$

Luego este punto falla como candidato, seguimos manteniendo solo 1.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Ahora supongamos que solo la segunda restricción está activa ($10v + 5s = 350$), pero que la primera no lo está, luego $\lambda_1 = 0$ por las condiciones de KKT. Esto significa que las CPO quedan

$$\frac{1}{v} - 10\lambda_2 = 0, \qquad \frac{1}{s} - 5\lambda_2 = 0$$

De aquí,

$$\frac{1}{10v} = \lambda_2 = \frac{1}{5s} \Rightarrow s = 2v$$

Reemplazando esto en la restricción activa obtenemos $v^* = 17{,}5$ y $s^* = 35$. **¡CUIDADO!** pues

$$0{,}1v^* + 0{,}2s^* = 1{,}75 + 7 = 8{,}75 > 8$$

Luego este punto falla como candidato, seguimos manteniendo solo 1.

Ejemplo (Condiciones necesarias de KKT)

Falta el último caso, donde ninguna restricción está activa. Pero en ese caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y las CPO quedan

$$\frac{1}{v} = 0, \qquad \frac{1}{s} = 0$$

Que nunca se satisface, luego no obtenemos nuevos candidatos en este punto.

La razón de por qué no hay candidatos en este caso es por lo que explicábamos anteriormente. Cuando eliminamos las restricciones buscamos puntos críticos de la función objetivo, pero esta función **no tiene puntos críticos**, de hecho, siempre es creciente.

Al final nos quedamos con un solo candidato que es la solución (¿por qué?).

Ejercicio (Condiciones necesarias de KKT)

Recuerde el problema de la ayudantía 6 sobre la silla de montar. Resulta que ahora no es un sticker, sino que una figura que se para sobre la silla. Suponga que $\phi = 1$ y que además enfrenta otra restricción. Resulta que la silla no es infinitamente grande, sino que está envuelta por la esfera de radio 3, luego usted quiere resolver

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & 4z - x^2 - y^2 - z^2 \\ \text{s.a.} \quad & xy \geq z \\ & x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \end{aligned}$$

(*Ayuda: Tenga cuidado con la primera restricción y recuerde que no es necesario revisar la CCR.*)

Un caso particular: Condiciones de no negatividad

Condiciones de no negatividad

- En aplicaciones es muy común que se pidan cantidades positivas ó 0.
  - El capital y el trabajo son cantidades positivas.
  - La empresa produce una cantidad positiva ó 0.
- Si x está sujeta a una restricción de no negatividad escribimos $x \geq 0$.
  - Como hemos visto, esto se puede escribir como $-x \leq 0$.
  - Y, por lo tanto, podemos incorporarlas a las condiciones de KKT.
- Esto funciona incluso si la restricción es una cota superior o inferior.
  - Solo tengo 5 computadores disponibles ($C \leq 5$).
  - Si produzco, al menos debo producir una unidad, por contrato ($Q \geq 1$).

Condiciones de no negatividad

- En este curso usaremos KKT para resolver problemas con estas restricciones.

- Pero en algunos libros o en otros cursos quizás ocupen KKT “modificado”.
  - Lo que se hace es olvidarse del multiplicador asociado a esas restricciones.
  - Y las CPO para las variables (condición 1) cambian de $= 0$ a ≤ 0.
  - Y solo son 0 cuando las restricciones están inactivas.

- **¡IMPORTANTE!** Solo preocúpense de escribir bien el problema.
  - Y seguir las condiciones de KKT con rigurosidad.

Ejemplo (Condiciones de no negatividad)

Resolvamos nuestro típico problema de la firma que maximiza sus beneficios sujeto a un presupuesto B. Si recuerdan, el problema se resolvía usando Lagrange cuando $B \geq 100$, ¿qué pasa si $0 < B < 100$?. Tratemos de resolverlo usando el planteamiento más robusto del comienzo del capítulo. El problema de optimización es

$$\begin{aligned} \max_{K,L} \quad & \sqrt{K} + L \\ s.a. \quad & K + 20L \leq B \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{aligned}$$

Con lagrangiano

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sqrt{K} + L - \lambda_1(K + 20L - B) - \lambda_2(-K) - \lambda_3(-L)$$

Ejemplo (Condiciones de no negatividad)

Partamos escribiendo las CPO

$$\frac{1}{2\sqrt{K}} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{CPO-K}$$

$$1 - 20\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{CPO-L}$$

Notar que para que la CPO-K se cumpla debe ser cierto que $K > 0$, luego $\lambda_2^* = 0$ por las condiciones de holgura complementaria (condición 2 de KKT). Esto modifica las CPO así

$$\frac{1}{2\sqrt{K}} - \lambda_1 = 0 \tag{CPO-K}$$

$$1 - 20\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{CPO-L}$$

Ejemplo (Condiciones de no negatividad)

De CPO-K se tiene que

$$\lambda_1^* = \frac{1}{2\sqrt{K^*}} > 0$$

luego la primera restricción debe estar activa, es decir, $K^* + 20L^* = B$. Veamos los casos posibles para λ_3^*. Si $\lambda_3^* = 0$, entonces por CPO-L se tiene

$$\lambda_1^* = \frac{1}{20}$$

y por CPO-K, $K^* = 100$. ¡Pero cuidado!, si esto es así, entonces

$$K + 20L = 100 + 20L \geq 100 > B$$

Luego no hay puntos candidatos en este caso.

Ejemplo (Condiciones de no negatividad)

Ahora, si $\lambda_3^* \neq 0$, entonces debe ser que $L^* = 0$ por las condiciones de holgura complementaria. Además, como la primera restricción está activa, $K^* = B$. Luego,

$$\lambda_1^* = \frac{1}{2\sqrt{K^*}} = \frac{1}{2\sqrt{B}}$$

y por CPO-L,

$$\lambda_3^* = 20\lambda_1 - 1 = \frac{10}{\sqrt{B}} - 1 = \frac{10 - \sqrt{B}}{\sqrt{B}}$$

y $\lambda_3^* > 0$ porque como $B < 100$, $\sqrt{B} < 10$. Notar que con esto hemos agotado todas las opciones: dedujimos que $\lambda_1^* > 0$ y $\lambda_2^* = 0$ en cualquier candidato, y revisamos las opciones para λ_3^*. La justificación del óptimo viene del hecho que por Weierstrass existe solución, que este método debiera encontrarlo y que el candidato tiene un valor más alto de la función objetivo que, por ejemplo, el punto $(0,0)$.

Ejemplo (Condiciones de no negatividad)

Para terminar, notemos que para revisar las CCR tenemos que ponernos en casos donde hayan distintas restricciones activas. Llamemos

$$g_1(K,L) = K + 20L, \qquad g_2(K,L) = -K, \qquad g_3(K,L) = -L$$

Que son las restricciones para que las escribamos en forma $g_i(K,L) \leq c_i$. Tenemos que

$$\nabla g_1(K,L) = (1,20), \qquad \nabla g_2(K,L) = (-1,0), \qquad \nabla g_3(K,L) = (0,-1)$$

Que son todos vectores LI solos o de a pares. El problema ocurre cuando consideramos estos 3 vectores a la vez. Eso significa que las 3 restricciones deben estar activas. Pero eso es imposible porque las dos últimas implican $K = L = 0$, pero en ese caso $K + 20L = 0 \neq B$ si $B > 0$.

Condiciones de no negatividad

Ejercicio (Condiciones de no negatividad)

Resuelva el problema "invertido" de la firma, de minimizar el costo sujeto a que la producción debe ser de **al menos** Q, tenga cuidado de revisar los casos con $Q \geq 10$ y $Q < 10$.